(2) دلتای کرونیکر : مقادیر روی قطر اصلی 1 و بقیه درایه‌ها صفر.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \text{if } i=j & 1 \\ \text{if } i\neq j & 0 \end{cases}$$

- انواع تغییر مکان یک نقطه:
  - ۱- جابه‌جایی صلب
  - ۲- تغییر شکل = نرمی ← کرنش

- معادلات تغییر شکل

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\tau = G.\gamma \quad , \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

G: مدول برشی، ν: ضریب پواسون، E: مدول الاستیسیته

- u: مؤلفه تغییر مکان جهت x
- v: = = = = y
- w: = = = = z

نکات:

۱- تنش طولی ایجاد کرنش برشی نمی‌کند.

۲- = برشی ایجاد کرنش طولی نمی‌کند.

۳- تنش برشی در یک صفحه، فقط در همان صفحه ایجاد کرنش برشی می‌کند.

- تانسور تنش در حالت کلی در یک نقطه در فضا

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ = & & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

تانسور تنش متقارن است.

- تجزیه تانسور تنش

به ۲ مؤلفه کروی و انحرافی به صورت زیر تجزیه می‌شود:

مؤلفه کروی $\sigma_{kk} = \dfrac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}}{3}$ ← مؤلفه هیدرواستاتیک

مؤلفه‌ای که باعث تغییر حجم می‌شود $= \sigma_{kk}$

تانسور تنش کروی $= \begin{bmatrix} \sigma_{kk} & & 0 \\ & \sigma_{kk} & \\ 0 & & \sigma_{kk} \end{bmatrix}$

مؤلفه انحرافی تنش باعث تغییر زاویا و هندسه می‌شود.

تانسور انحرافی $= \sigma - \sigma$

حالت تنش مسطح :

در این حالت، در جهت z تنش نداریم، ولی مؤلفه کرنش وجود خواهد داشت.

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad , \quad \varepsilon_z \neq 0$$

حالت کرنش مسطح :

در این حالت در جهت z کرنش نخواهیم داشت:

$$\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0 \quad , \quad \sigma_z \neq 0$$

$$\varepsilon_z = 0 \rightarrow \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right) = 0 \rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

مجهولات ما در هر ۲ حالت تنش مسطح و کرنش مسطح، σ_x ، σ_y ، γ_{xy} می باشد.

تعیین تنش در صفحات دیگر

فرضیات : ۱- نبود نیروهای حجمی ۲- توزیع یکنواخت تنش روی صفحات

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cdot \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$$

$$\tau_\theta = (\sigma_y - \sigma_x)\sin\theta \cdot \cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

اگر x و y جهات اصلی باشند، در این صورت τ_{xy} برابر صفر بوده و روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cdot \cos^2\theta + \sigma_y \cdot \sin^2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta \cdot (\sigma_y - \sigma_x)$$

تعیین کرنش در یک نقطه دلخواه

اگر نقطه مورد نظر A و زاویه نقطه (صفحه مورد نظر) با x برابر θ_A باشد:

$$\varepsilon_{\theta_A} = \varepsilon_x \cdot \cos^2\theta_A + \varepsilon_y \sin^2\theta_A + \gamma_{xy} \cdot \cos\theta_A \cdot \sin\theta_A$$

معادلات تعادل

X، Y، Z نیروهای حجمی می باشند.

$$1) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$2) \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$

$$3) \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

* حل چند سوال دکترا مربوط به مباحث قبلی

سؤال دکترا ۹۲ سراسری عمران : مقدار A چقدر باشد تا میدان کرنش زیر سازگار گردد؟

$$\varepsilon_{11} = A x_2^2 + x_1 x_2$$

$$\varepsilon_{22} = A x_2^2 + 4 x_1^2$$

$$\varepsilon_{12} = 3A x_1 . x_2$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$$

حل : اندیس‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب معادل اندیس‌های x، y و z خرده می‌باشند. باتوجه به فرمول خرده

برای سازگاری تغییر شکل‌ها داریم :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x . \partial y}$$

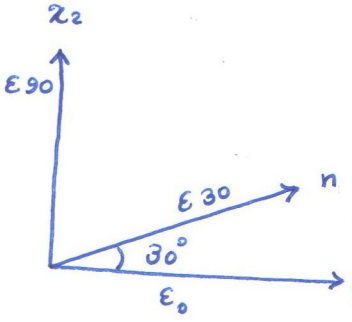
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} = 2A \quad , \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 8$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x . \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 . \partial x_2} = 3A \xrightarrow[\text{در معادله اصلی}]{\text{جای‌گذاری}} 2A + 8 = 2(3A) \rightarrow 4A = 8$$

$$\rightarrow A = 2$$

- نزنیه ۱) ۴
- نزنیه ۲) ۳
- نزنیه ۳) ۲ ✓
- نزنیه ی ۴) ۱

سؤال دکترا ۹۲ سراسری عمران : اگر $\varepsilon_{30} = 0.02\sqrt{3}$ ، $\varepsilon_0 = 0.01\sqrt{3}$ ، $\varepsilon_{90} = -0.03\sqrt{3}$ باشد، ε_{12} چقدر است؟



حل : از رابطه‌ی کرنش در نقطه‌ی دلخواه استفاده می‌کنیم.

$$\varepsilon_{\theta_A} = \varepsilon_x \cos^2\theta_A + \varepsilon_y \sin^2\theta_A + \gamma_{xy} . \sin\theta_A . \cos\theta_A$$

$\theta_A = 30 \rightarrow \varepsilon_{30} = 0.02\sqrt{3}$

$\varepsilon_x = \varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0 = 0.01\sqrt{3}$

$\varepsilon_y = \varepsilon_{90} \rightarrow \varepsilon_{90} = -0.03\sqrt{3}$

$$\Rightarrow 0.02\sqrt{3} = 0.01\sqrt{3} \cos^2 30 + (-0.03\sqrt{3}) \sin^2 30 + \gamma_{xy} \sin 30 . \cos 30$$

$$\rightarrow 0.02\sqrt{3} = 0.01\sqrt{3} . \frac{3}{4} + (-0.03\sqrt{3} . \frac{1}{4}) + \gamma_{xy} . \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \gamma_{xy} = 0.08$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}(0.08) = 0.04 \rightarrow \varepsilon_{12} = 0.04$$

- ۱) 0.01
- ۲) 0.02
- ۳) 0.04 ✓
- ۴) 0.03